

引文格式: 黄超, 杨文安, 黄久超, 等. 基于三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法的铣削稳定性预测 [J]. 航空制造技术, 2021, 64(8): 92-101.

HUANG Chao, YANG Wenan, HUANG Jiuchao, et al. A full-discretization method for milling stability prediction based on third-order Newton-Hermite interpolation[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2021, 64(8): 92-101.

## 基于三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法的铣削稳定性预测\*

黄超<sup>1,2</sup>, 杨文安<sup>2</sup>, 黄久超<sup>1</sup>, 解菲菲<sup>1</sup>, 杨有成<sup>1</sup>

(1. 上海航天精密机械研究所, 上海 201600;

2. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

**[摘要]** 铣削加工过程中的颤振通常会导致加工零件表面质量差、刀具磨损加剧, 甚至会降低数控机床寿命。针对基于再生颤振理论构建的铣削动力学模型, 提出了一种三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法来预测铣削稳定性。考虑再生颤振的动态铣削过程可以表示为时滞微分方程组, 运用三阶牛顿插值多项式和三阶埃尔米特插值多项式分别对积分项中的状态项和时滞项进行拟合, 从而推导出转移矩阵。利用 Floquet 理论判断系统的稳定性, 进而获得铣削稳定性叶瓣图。大量仿真结果表明, 所提出方法的收敛速度要快于一阶全离散法 (1stFDM) 和改进三阶全离散法 (3rdUFDM)。在离散数相同情况下, 文中方法的局部离散误差最小。此外, 在单自由度动力学模型下, 文中方法的计算效率不仅高于 1stFDM 和 3rdUFDM, 而且预测精度远好于 1stFDM, 稍好于 3rdUFDM。通过切削试验数据表明, 所提出的方法可高效准确地预测铣削稳定性。

**关键词:** 三阶牛顿插值; 三阶埃尔米特插值; 全离散法; 稳定性分析; 叶瓣图

### A Full-Discretization Method for Milling Stability Prediction Based on Third-Order Newton-Hermite Interpolation

HUANG Chao<sup>1,2</sup>, YANG Wenan<sup>2</sup>, HUANG Jiuchao<sup>1</sup>, XIE Feifei<sup>1</sup>, YANG Youcheng<sup>1</sup>

(1. Shanghai Spaceflight Precision Machinery Institute, Shanghai 201600, China;

2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**[ABSTRACT]** In milling processes, chatter usually results in poor surface quality, tool wear and even shorten the life of machine tool. In order to build the dynamic model of milling process using regenerative theory, a new full-discretization method based on third-order Newton-Hermite interpolation method is proposed in this study. The dynamic milling process considering regenerative chatter can be expressed as delay differential equations, then the transition matrix is constructed by using third-order Newton and Hermite interpolation of the state item and the time-delay term, respectively. Finally, the stability of the system was determined based on the Floquet theory, and the corresponding stability lobe diagrams are obtained. The numerical results obtained utilizing extensive simulation indicate that the convergence rate of the proposed method is faster than that of the first full-discretization method (1stFDM) and the third-order updated full-discretization method (3rdUFDM), and the discrete error of the proposed method is the smallest at the same of the discrete number. In addition, for single degree of freedom dynamic model, the proposed method is more efficient than the 1stFDM and the 3rdUFDM, and the computation accuracy of the proposed method is better than that of the 1stFDM and the 3rdUFDM. The experimental results show that the proposed method is effective for predicting the milling stability.

**Keywords:** Third-order Newton interpolation; Third-order Hermite interpolation; Full-discretization method; Stability analysis; Lobe diagrams

DOI:10.16080/j.issn1671-833x.2021.08.092

\* 基金项目: 南京航空航天大学研究生创新基地(实验室)开放基金项目(KFJJ20180518); 国家自然科学基金面上项目(51707501); 国防基础科研重点项目(JCKY2016605B006)。

铣削作为一种高效的切削加工方法,具有加工精度高、材料去除率大和加工成本低等优点。在铣削过程中,主要存在的振动形式有自由振动、受迫振动及自激振动,其中自激振动中的再生颤振是引起加工过程不稳定的主要因素<sup>[1-2]</sup>。铣削颤振通常会导致加工零件表面质量差、刀具磨损加剧以及数控机床寿命降低等问题<sup>[3]</sup>。此外,考虑再生颤振的铣削动力学模型可以近似地描述为时滞微分方程,通过求解时滞微分方程可以获得稳定性叶瓣图,达到铣削稳定性预测的目的<sup>[4]</sup>。因此,如何快速精确地获取铣削稳定性叶瓣图显得尤为重要。

迄今为止,预测铣削稳定性的方法主要分为数值法<sup>[5-6]</sup>和解析法<sup>[7-16]</sup>。Davies等<sup>[5]</sup>提出了一种改进的时域计算方法预测出了小径向切深切削下的额外不稳定区域。Li等<sup>[6]</sup>提出了基于Runge-Kutta法的铣削稳定性时域分析方法,但计算效率太低。Altintas等<sup>[7]</sup>提出了一种经典的零阶解析方法,但是该方法不能预测小径向切深切削下的铣削稳定性。Merdol等<sup>[8]</sup>提出了考虑了周期力系数矩阵的高阶展开项多频率法,实现了小径向切深切削下的稳定性预测。Insperger等<sup>[9]</sup>通过对时滞项进行离散处理,提出了具有高精度的时域数值稳定性预测方法。Ding等<sup>[10-11]</sup>基于直接积分思想提出了包括一阶全离散法(1stFDM)和二阶全离散法的稳定性预测方法。全离散法利用线性插值同时逼近时滞微分方程中的状态项和时滞项,极大提高了方法计算效率。Ding等<sup>[12]</sup>随后提出了一种基于牛顿-柯特斯公式的数值积分法,该方法通过直接离散积分方程的积分项构造出相邻周期的转移矩阵来预测铣削稳定性。随后,Zhang等<sup>[13]</sup>在此基础上通过辛普森公式提出了一种全新的铣削稳定性预测方法。最近,Yan等<sup>[14]</sup>基于全离散法,提出了一种改进的三阶全离散法(3rdUFDM),得到了比一阶、二阶全离散法更高的预测精度和计算效率。Dai等<sup>[15]</sup>提出了一种基于黄金比例搜索的改进全离散方法来预测铣削稳定性,并且引入精细积分法来计算矩阵指数,极大地提高了该方法的计算效率。Li等<sup>[16]</sup>利用泰勒公式对非齐次项二次展开,提出了显式精细积分法预测铣削稳定性。

本文基于再生颤振理论构建的铣削动力学模型,提出一种高精度、高效率的预测铣削稳定性的三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法。

## 1 动力学模型

### 1.1 单自由度动力学模型

一般来说,考虑再生颤振的单自由度铣削动力学模型表述为时滞微分方程<sup>[9]</sup>:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -\frac{wh(t)}{m_t}[x(t) - x(t-T)] \quad (1)$$

式中, $m_t$ 、 $\zeta$ 和 $\omega_n$ 分别表示刀具的模态质量、刀具的阻尼比和自然频率; $w$ 为轴向切削深度; $x(t)$ 为刀具模态坐标;时滞量 $T$ 等于刀齿切削周期,即 $T=60/(N\Omega)$ , $N$ 为刀具齿数, $\Omega$ 为主轴转速( $r/min$ );切削力系数 $h(t)$ 表示为:

$$h(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) [K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t))] \quad (2)$$

式中, $K_t$ 和 $K_n$ 分别为切向和径向切削力系数; $\phi_j(t)$ 为第 $j$ 个刀齿转角:

$$\phi_j(t) = (2\pi\Omega/60)t + (j-1)2\pi/N \quad (3)$$

函数 $g(\phi_j(t))$ 定义为:

$$g(\phi_j(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi_{st} \leq \phi_j(t) \leq \phi_{ex} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\phi_{st}$ 和 $\phi_{ex}$ 分别是刀齿的切入与切出角。对于顺铣, $\phi_{st} = \arccos(2a/D-1)$ , $\phi_{ex} = \pi$ ;对于逆铣, $\phi_{st} = 0$ , $\phi_{ex} = \arccos(1-2a/D)$ ,其中 $a/D$ 为径向切深与刀具直径之比。

令 $x(t) = [x(t) \quad m\dot{x}(t) + m\zeta\omega_n x(t)]^T$ ,单自由度铣削模型的状态空间形式为:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B(t)x(t) - B(t)x(t-T) \quad (5)$$

$$\text{式中, } A_0 = \begin{bmatrix} -\zeta\omega_n & m_t^{-1} \\ m_t(\zeta\omega_n)^2 - m_t\omega_n^2 & -\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -wh(t) & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.2 双自由度铣削模型

不失一般性,考虑再生颤振的双自由度铣削动力学模型表述为时滞微分方程<sup>[9]</sup>:

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n m_t & 0 \\ 0 & 2\zeta\omega_n m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_n^2 m_t & 0 \\ 0 & \omega_n^2 m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = -w \begin{bmatrix} h_{xx}(t) & h_{xy}(t) \\ h_{yx}(t) & h_{yy}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-T) \\ y(t) - y(t-T) \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $m_t$ 、 $\zeta$ 和 $\omega_n$ 分别为刀具的模态质量、刀具的阻尼比和自然频率; $w$ 为轴向切削深度;并假设它们在 $x$ 和 $y$ 两个方向是相等的, $h_{xx}(t)$ 、 $h_{xy}(t)$ 、 $h_{yx}(t)$ 和 $h_{yy}(t)$ 为如下函数:

$$\begin{aligned} h_{xx}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) [K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t))] \\ h_{xy}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \cos(\phi_j(t)) [K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t))] \\ h_{yx}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) [-K_t \sin(\phi_j(t)) + K_n \cos(\phi_j(t))] \\ h_{yy}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \cos(\phi_j(t)) [-K_t \sin(\phi_j(t)) + K_n \cos(\phi_j(t))] \end{aligned} \quad (7)$$

令  $x(t)=[x(t) \ y(t) \ m_1\dot{x}(t)+m_1\zeta\omega_n x(t) \ m_1\dot{y}(t)+m_1\zeta\omega_n y(t)]^T$ 。  
同样地,双自由度铣削模型的状态空间形式为:

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+B(t)x(t)-B(t)x(t-T) \quad (8)$$

其中,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\zeta\omega_n & 0 & 1/m_1 & 0 \\ 0 & -\zeta\omega_n & 0 & 1/m_1 \\ m_1(\zeta_2-1)\omega_n^2 & 0 & -\zeta\omega_n & 0 \\ 0 & m_1(\zeta_2-1)\omega_n^2 & 0 & -\zeta\omega_n \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -wh_{xx}(t) & -wh_{xy}(t) & 0 & 0 \\ -wh_{yx}(t) & -wh_{yy}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2 三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法

由前文可知,考虑再生颤振的铣削动力学方程可由以下  $n$  维状态空间方表述:

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+B(t)x(t)-B(t)x(t-T) \quad (9)$$

式中,  $A_0$  是表示系统时不变性质的常数矩阵,  $B(t)$  为周期系数矩阵,并满足  $B(t+T)=B(t)$ 。

三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法的第 1 步是将刀齿切削周期  $T$  离散为  $m$  个相等的时间区段,即  $T=m\tau$  (其中  $m$  为正整数)。在每一个时间区段  $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$ , ( $k=0, \dots, m$ ) 上,以  $x_k=x(k\tau)$  为初始条件,式(9)的响应可以表示为:

$$x(t) = e^{A_0(t-k\tau)}x(k\tau) + \int_{k\tau}^t \{e^{A_0(t-\xi)}B(\xi)[x(\xi)-x(\xi-T)]\}d\xi \quad (10)$$

令  $f(\xi)=B(\xi)x(\xi)$ ,  $v(\xi)=B(\xi)x(\xi-T)$ ,式(10)可以等效表示为

$$x_{k+1} = e^{A_0\tau}x_k + \int_0^\tau \{e^{A_0(t-\delta)}[f(\delta)-v(\delta-T)]\}d\delta \quad (11)$$

其中,  $\delta=\xi-k\tau$ ,  $\delta \in [0, \tau]$ 。求解式(11)中的积分项时首先构造牛顿插值多项式:

$$Q_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (12)$$

其中,系数  $a_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 由插值条件得

$$Q_n(x_i)=f(x_i), i=0, 1, \dots, n \quad (13)$$

由插值条件  $Q_n(x_0)=f(x_0)$  得:

$$a_0=f(x_0)=f[x_0] \quad (14)$$

由插值条件  $Q_n(x_1)=f(x_1)$  得:

$$a_1 = \frac{f(x_1)-a_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1] \quad (15)$$

一般可得:

$$a_i=f[x_0, x_1, \dots, x_i], i=0, 1, \dots, n \quad (16)$$

这样得到满足插值条件  $Q_n(x_i)=f(x_i)$ , ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 的  $n$  次牛顿插值多项式

$$Q_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (17)$$

式中,  $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

称为  $f(x)$  关于  $x_0, x_1, \dots, x_n$  的  $n$  阶差商。在时间段  $[k\tau, (k+1)\tau]$ , 状态项  $f(\delta)$  可以通过  $f_{k+1}, f_k, f_{k-1}$  和  $f_{k-2}$  4 项进行三阶牛顿插值,并表示为:

$$f(\delta)=a_1f_{k+1}+a_2f_k+a_3f_{k-1}+a_4f_{k-2} \quad (18)$$

其中,

$$a_1 = \frac{\delta^3 + 3\tau\delta^2 + 2\tau^2\delta}{6\tau^3}$$

$$a_2 = \frac{\delta^2 + 3\tau\delta + 2\tau^2}{2\tau^2} - \frac{\delta^3 + 3\tau\delta^2 + 2\tau^2\delta}{2\tau^3}$$

$$a_3 = \frac{\delta + 2\tau}{\tau} - \frac{\delta^2 + 3\tau\delta + 2\tau^2}{\tau^2} + \frac{\delta^3 + 3\tau\delta^2 + 2\tau^2\delta}{2\tau^3}$$

$$a_4 = 1 + \frac{\delta + 2\tau}{\tau} + \frac{\delta^2 + 3\tau\delta + 2\tau^2}{2\tau^2} - \frac{\delta^3 + 3\tau\delta^2 + 2\tau^2\delta}{6\tau^3}$$

$$f_{k+1}=B_{k+1}x_{k+1} \quad f_k=B_kx_k \quad f_{k-1}=B_{k-1}x_{k-1} \quad f_{k-2}=B_{k-2}x_{k-2} \quad (20)$$

其中,  $B_k$  表示  $B(t)$  在时间点  $t_k=k\tau$  的取值。然后构造埃尔米特插值多项式,给定  $f(x)$  在  $n+1$  个节点  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$  上的函数值  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ , 以及一阶导数值  $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$ 。则可在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上构造 3 次埃尔米特插值多项式

$$P_{3,i}(x) = \alpha_{0,i}(x)f(x_i) + \alpha_{1,i}(x)f(x_{i+1}) + \beta_{0,i}(x)f'(x_i) + \beta_{1,i}(x)f'(x_{i+1}) \quad (21)$$

其中,

$$\alpha_{0,i}(x) = \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

$$\alpha_{1,i}(x) = \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)$$

$$\beta_{0,i}(x) = \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 (x-x_i)$$

$$\beta_{1,i}(x) = \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 (x-x_{i+1}) \quad (22)$$

所以,在时间区间  $[(k-m)\tau, (k+1-m)\tau]$  中,时滞项  $v(\delta-T)$  可通过埃尔米特插值获得:

$$v(\delta-T)=b_1v_{k-m}+b_2v_{k+1-m}+b_3v_{k+2-m} \quad (23)$$

其中,

$$b_1 = \frac{\tau^3 - \tau^2\delta - \tau\delta^2 + \delta^3}{\tau^3}$$

$$b_2 = \frac{\tau^2\delta + 2\tau\delta^2 - 2\delta^3}{\tau^3}$$

$$b_3 = \frac{\delta^3 - \tau\delta^2}{\tau^3} \quad (24)$$

$$v_{k-m} = B_k x_{k-m}, v_{k+1-m} = B_{k+1} x_{k+1-m}, v_{k+2-m} = B_{k+2} x_{k+2-m} \quad (25)$$

将式(18)~(25)代入式(11),简化的铣削系统表达式为:

$$H_{k,-2}x_{k-2} + H_{k,-1}x_{k-1} + (H_{k,0} + T_1)x_k + (H_{k,1} - I)x_{k+1} = H_{k,m}x_{k-m} + H_{k,m-1}x_{k+1-m} + H_{k,m-2}x_{k+2-m} \quad (26)$$

其中,

$$T_1 = e^{A_0 \tau} \quad (27)$$

$$H_{k,1} = \left[ T_1 \times \left( \frac{A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{A_0^{-3}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-2}}{3\tau} \right) - \left( \frac{A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{2A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{11A_0^{-3}}{6\tau} + A_0^{-2} \right) \right] B_{k+1}$$

$$H_{k,0} = \left[ T_1 \times \left( \frac{-3A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{-2A_0^{-3}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-2}}{2\tau} + A_0^{-1} \right) + \left( \frac{3A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{5A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{3A_0^{-3}}{\tau} \right) \right] B_k$$

$$H_{k,-1} = \left[ T_1 \times \left( \frac{3A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{A_0^{-3}}{\tau^2} + \frac{-A_0^{-2}}{\tau} \right) - \left( \frac{4A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{4A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-3}}{\tau} \right) \right] B_{k-1}$$

$$H_{k,-2} = \left[ T_1 \times \left( \frac{-A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{A_0^{-2}}{6\tau} \right) + \left( \frac{-A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-3}}{3\tau} \right) \right] B_{k-2}$$

$$H_{k,m} = \left[ T_1 \times \left( \frac{6A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{-2A_0^{-3}}{\tau^2} + \frac{-A_0^{-2}}{\tau} + A_0^{-1} \right) - \left( \frac{6A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{4A_0^{-4}}{\tau^2} \right) \right] B_k$$

$$H_{k,m-1} = \left[ T_1 \times \left( \frac{-12A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{4A_0^{-3}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-2}}{\tau} \right) + \left( \frac{12A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{8A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-3}}{\tau} - A_0^{-2} \right) \right] B_{k+1}$$

$$H_{k,m-2} = \left[ T_1 \times \left( \frac{6A_0^{-4}}{\tau^3} + \frac{-2A_0^{-3}}{\tau^2} \right) - \left( \frac{6A_0^{-5}}{\tau^3} + \frac{4A_0^{-4}}{\tau^2} + \frac{A_0^{-3}}{\tau} \right) \right] B_{k+2} \quad (28)$$

基于矩阵指数的加法定理,矩阵指数  $T_1$  可写为

$$T_1 = (e^{A_0 dt})^{2^n} \quad (29)$$

其中,  $dt = \Delta t / 2^n$ 。为了提高计算精度,一般取  $n=20$ ,精细区段  $dt$  就已经非常小的区段了<sup>[17]</sup>。当  $dt$  非常小时,可采用 Taylor 级数展开近似矩阵指数,即

$$e^{A_0 dt} \cong I + T_a \quad (30)$$

$$T_a = A_0 dt + (A_0 dt)^2 / 2! + (A_0 dt)^3 / 3! + (A_0 dt)^4 / 4!$$

将式(30)代入式(29),矩阵指数  $T_1$  近似解为

$$T_1 = (I + T_a)^{2^n} = (I + 2T_a + T_a \times T_a)^{2^{n-1}} \quad (31)$$

执行以下运算,

$$\text{for}(i=1; i \leq n; i++) T_a = 2T_a + T_a \times T_a; \quad T_1 = I + T_a; \quad (32)$$

由式(26)可以构造如下离散映射

$$D_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \end{bmatrix} = D_2 \begin{bmatrix} x_{1-m} \\ x_{2-m} \\ \vdots \\ x_{m-m} \\ x_{m+1-m} \end{bmatrix} \quad (33)$$

其中,

$$D_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ T_1 + H_{1,0} & H_{1,1} - I & 0 & 0 & \dots \\ H_{2,-1} & T_1 + H_{2,0} & H_{2,1} - I & 0 & \dots \\ H_{3,-2} & H_{3,-1} & T_1 + H_{3,0} & H_{3,1} - I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -H_{m,m-2} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m-1,-2} & H_{m-1,-1} & T_1 + H_{m-1,0} & H_{m-1,1} - I & 0 \\ 0 & H_{m,-2} & H_{m,-1} & T_1 + H_{m-1,0} & H_{m-1,1} - I \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ H_{1,m} & H_{1,m-1} & H_{1,m-2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_{2,m} & H_{2,m-1} & H_{2,m-2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H_{3,m} & H_{3,m-1} & H_{3,m-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m-1,m} & H_{m-1,m-1} & H_{m-1,m-2} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & H_{m,m} & H_{m,m-1} & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

然后,系统在单个时间周期上的状态转移矩阵  $\Phi$  定义为

$$\Phi = (D_1)^{-1} D_2 \quad (34)$$

最后,根据 Floquet 理论,若系统转移矩阵  $\Phi$  特征值都小于 1,则系统稳定;否则,系统发生颤振。

### 3 数值仿真结果分析

#### 3.1 收敛性分析

局部离散误差分析可以反映所提方法近似解收敛

速度的快慢。将局部离散误差  $\|\mu - \mu_0\|$  表示为周期离散数  $m$  的函数,其中参考值  $|\mu_0|$  是  $m=500$  时采用 1stFDM 得到的特征值的模。以单自由度铣削动力学模型为例,对本文所提出方法与 1stFDM 和 3rdUFDM 的收敛性进行分析。本文中数值仿真所采用的仿真参数均与文献 [14] 相同。切削参数为:切向力系数  $K_t=6 \times 10^8 \text{N/m}^2$ ,法向力系数  $K_n=2 \times 10^8 \text{N/m}^2$ ,径向切深比  $a/D=1$ ,主轴转速  $\Omega=5000 \text{r/min}$ ,轴向切削深度  $w=0.2 \text{mm}, 0.5 \text{mm}, 0.7 \text{mm}, 1 \text{mm}$ 。模态参数:顺铣,刀具齿数  $N=2$ ,模态质量  $m_t=0.03993 \text{kg}$ ,模态阻尼  $\zeta=0.011$ ,固有频率  $\omega_n=922 \times 2\pi \text{rad/s}$ 。本文所有仿真均在台式机电脑(Inter(R) Core(TM) i5-7400 CPU, 8GB)上运行,运行平台为 MATLAB 9.2,操作系统为 Windows 10。

图 1 给出了 1stFDM、3rdFDM 和文中方法在 4 种不同轴向切削深度时的局部离散误差变化趋势。由图 1 可知,随着离散数  $m$  的增加,1stFDM、3rdUFDM 和文中方法的局部离散误差逐渐接近于零。在离散数相同的情况下,文中方法的局部离散误差最小。比如主轴转速  $\Omega=5000 \text{r/min}$ ,轴向切削深度  $w=0.7 \text{mm}$ ,离散数  $m=45$  时,

1stFDM、3rdUFDM 和文中方法的局部离散误差分别为 0.043, 0.014 和 0.003,文中方法的计算精度比 1stFDM 和 3rdUFDM 的计算精度分别提高约 93% 和 79%。在相同的局部离散误差下,文中方法所需的周期离散数更小。因此,文中方法的计算效率远远高于 1stFDM 和 3rdUFDM。

文中方法两自由度的局部离散误差变化趋势如图 2 所示。两自由度铣削过程的系统参数取值的大小与单自由度的参数相同。由图 2 可知,两自由度模型的收敛速度和单自由度模型的收敛速度一样快,且当离散误差  $m=40$  时都接近于 0。

### 3.2 稳定性叶瓣图

#### 3.2.1 单自由度铣削模型

在单自由度铣削模型中,为了比较稳定性边界的计算精度,分别使用 1stFDM、3rdUFDM 和文中方法获得稳定性叶瓣图。将模态参数设置与 3.1 节相同,主轴转速  $5000 \leq \Omega \leq 10000 \text{r/min}$ ,轴向切削深度  $0 \leq w \leq 10 \text{mm}$ ,径向比  $a/D=1$ ,顺铣,主轴转速与轴向切削深度平面的网格数为  $200 \times 100$ 。当离散数  $m$  足够大时,1stFDM 获

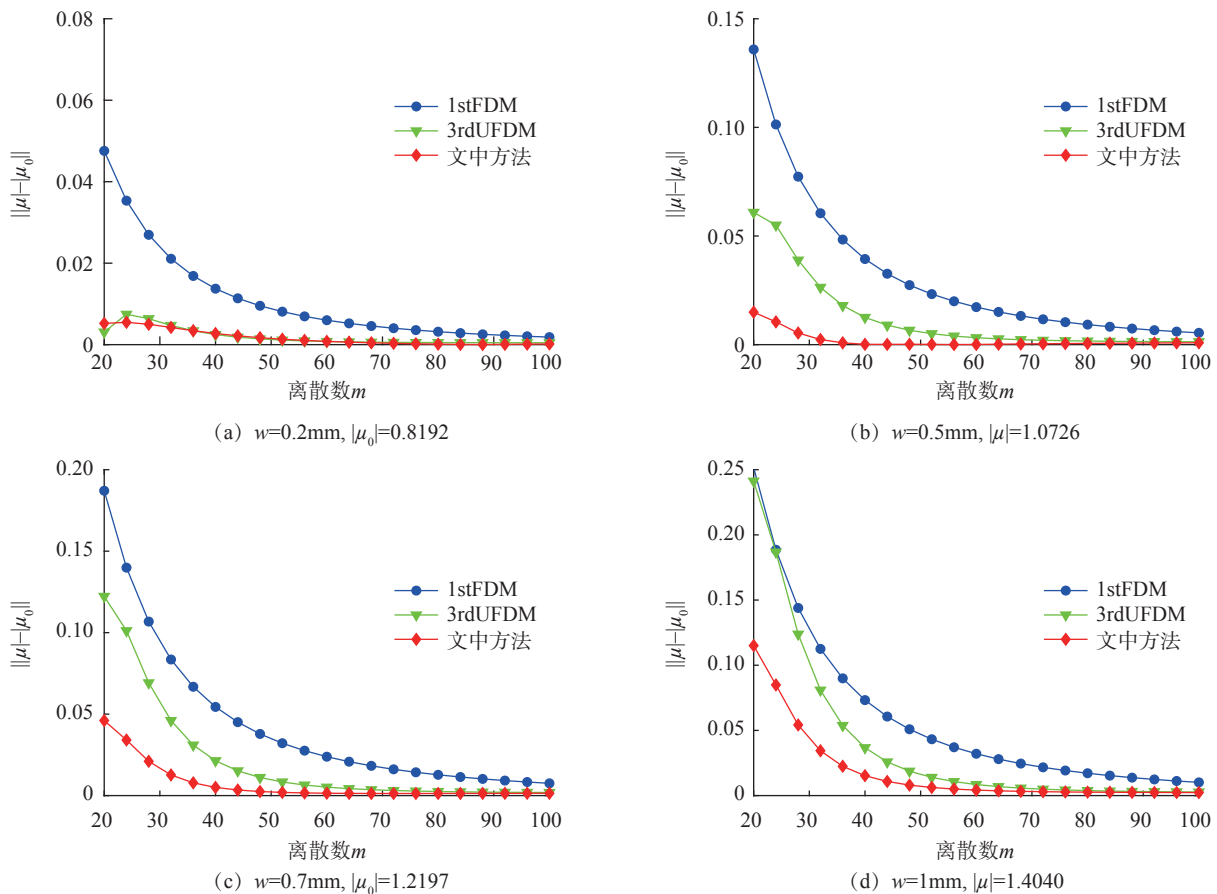


图 1 1stFDM、3rdUFDM和本文方法收敛速度的比较

Fig.1 Convergence rate comparison of 1stFDM, 3rdUFDM and proposed method

取的稳定性边界接近于真实值<sup>[10]</sup>。因此,取离散数 $m=200$ ,1stFDM获取的稳定性叶瓣图作为参考并在图中以红色给出。

图3给出了在不同离散数下3种方法所得的稳定性叶瓣图与参考曲线的对比结果,同时给出了计算时间。可知,随着离散数 $m$ 的增加,3种方法的计算精度逐渐提高。显然当离散数 $m$ 相同时,文中方法的计算精度比1stFDM和3rdUFDM的计算精度都高,而且计算时间都是最短的。所以,文中方法是一种具有较高的计算精度和计算效率的铣削稳定性预测方法。

### 3.2.2 双自由度铣削模型

双自由度铣削过程的系统参数取值的大小与单自由度的参数相同。周期离散数 $m$ 取为40,主轴转速与轴向切削深度平面划分为 $200 \times 100$ 网格点,径向切深比 $a/D=0.05, 0.1, 0.5$ 顺铣。在双自由度铣削模型中,1stFDM、3rdUFDM和文中方法的铣削稳定性叶瓣图计算结果和时间列于图4中。可知,当 $a/D=0.5$ 时,在没有损失任何计算精度的前提下,文中方法的计算时间较1stFDM缩短21%,较3rdUFDM缩短9%。故文中方法是一种更加高效的铣削稳定性预测方法。

## 4 试验验证

针对本文提出的用于预测铣削稳定性的算法,本节通过试验对铣削稳定性预测结果进行验证。Gradisek等<sup>[18]</sup>已经通过试验验证了半离散法的有效性,所以本次验证试验所用的模态参数和切削试验数据均与文献[18]相同,仿真结果和试验结果如图5所示。

可以看出,当径向比 $a/D$ 取1、0.5和0.1时,文中方法所获得的稳定性叶瓣图很好地预测出了铣削系统的稳定区域。对于小径向铣削,即 $a/D=0.05$ ,文中方法所获得的稳定性叶瓣图和试验结果还是吻合的,但是在主轴转速 $11000 \leq \Omega \leq 17000 \text{r/min}$ 时预测误差较大,这可能是由于本文使用的铣削动力学模型没有考虑实际铣削过程中存在的某些非线性因素,导致上述稳定性叶瓣图与实际试验之间存在误差。综上所述,本文方法是一种高效准确的预测铣削稳定性的方法。

## 5 结论

针对考虑再生颤振的铣削动力学模型,本文提出了三阶牛顿-埃尔米特插值全离散法预测铣削稳定性。

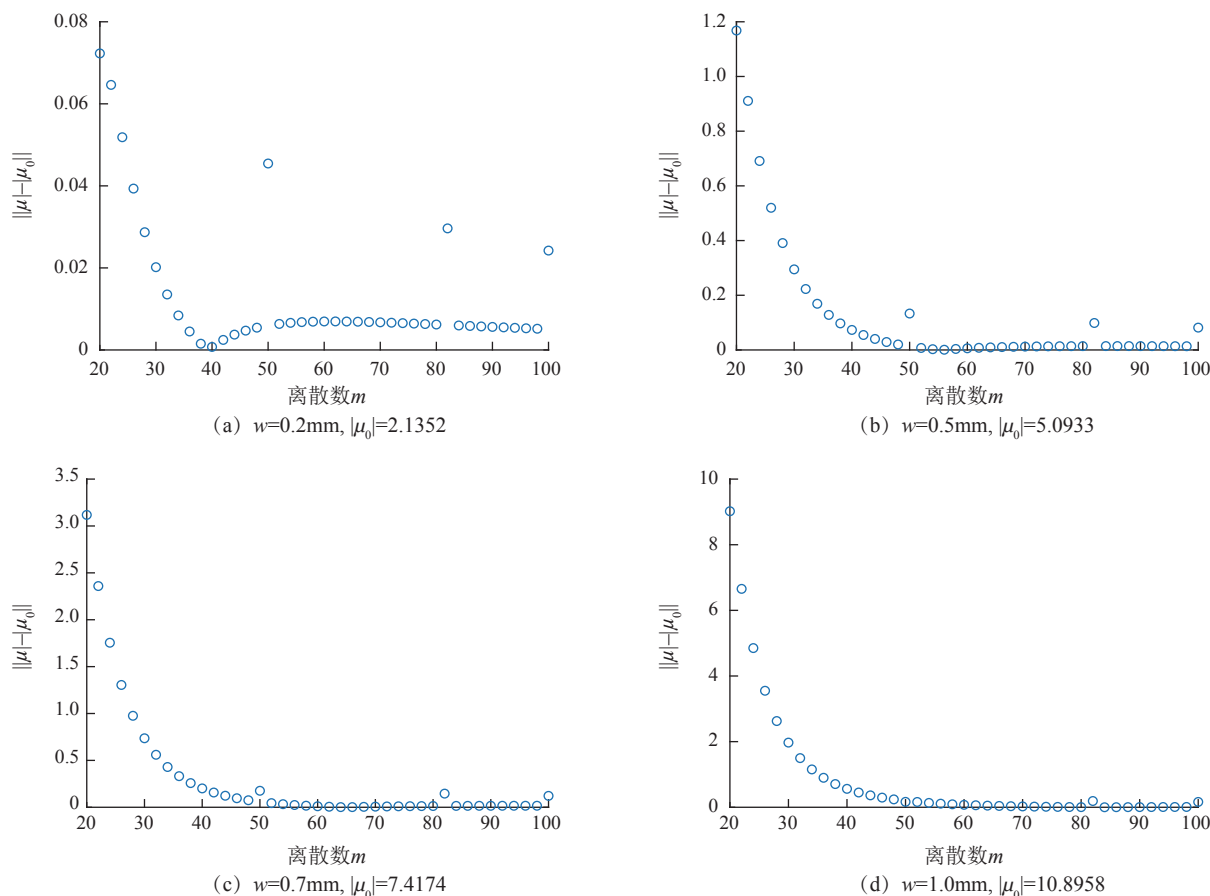


图2 本文方法两自由度收敛速度

Fig.2 Convergence rate of the proposed method for two degree-of-freedom

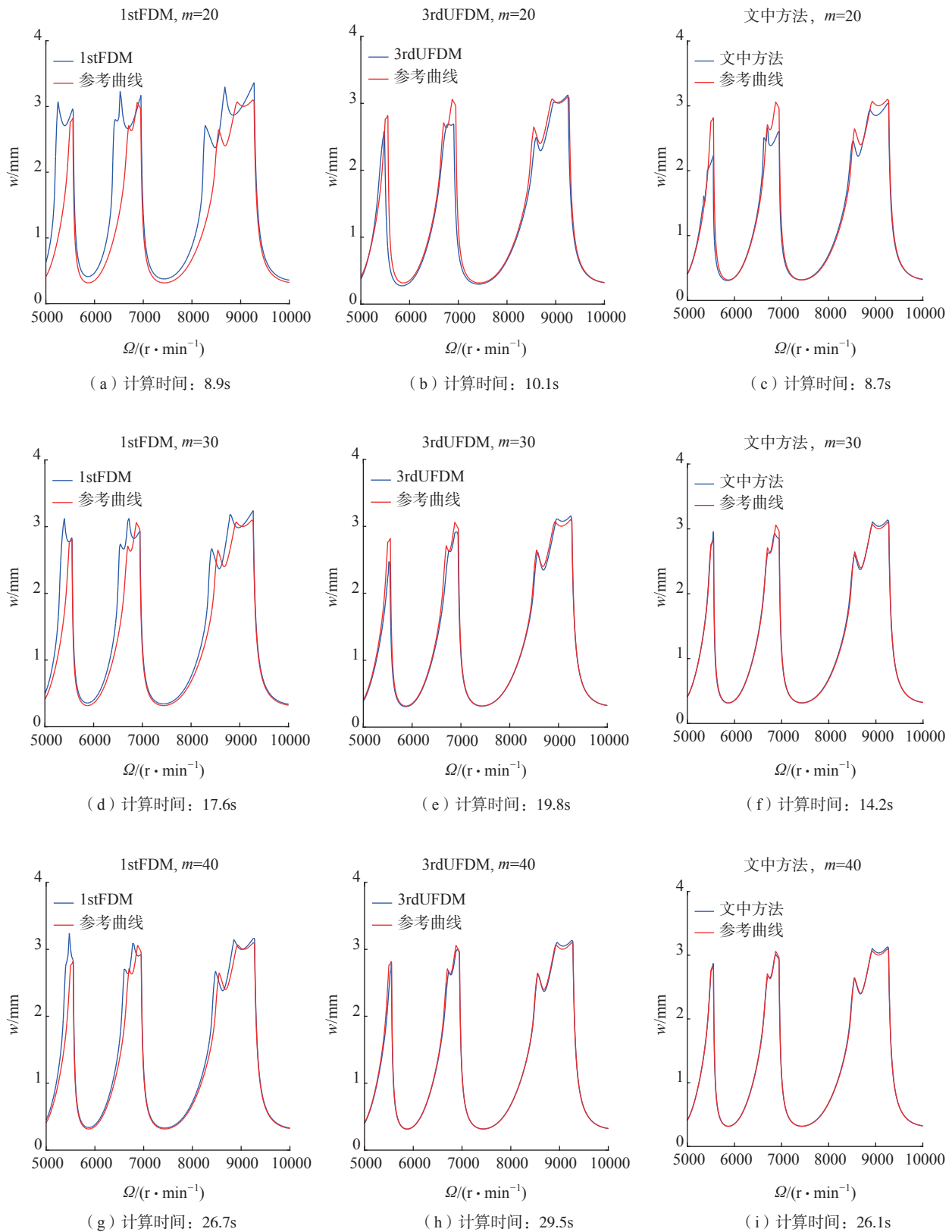


图3 1stFDM、3rdUFDM和文中方法对于单自由度模型的稳定性叶瓣图

Fig.3 Stability lobes of 1stFDM, 3rdUFDM and proposed method in this paper for a single degree of freedom model

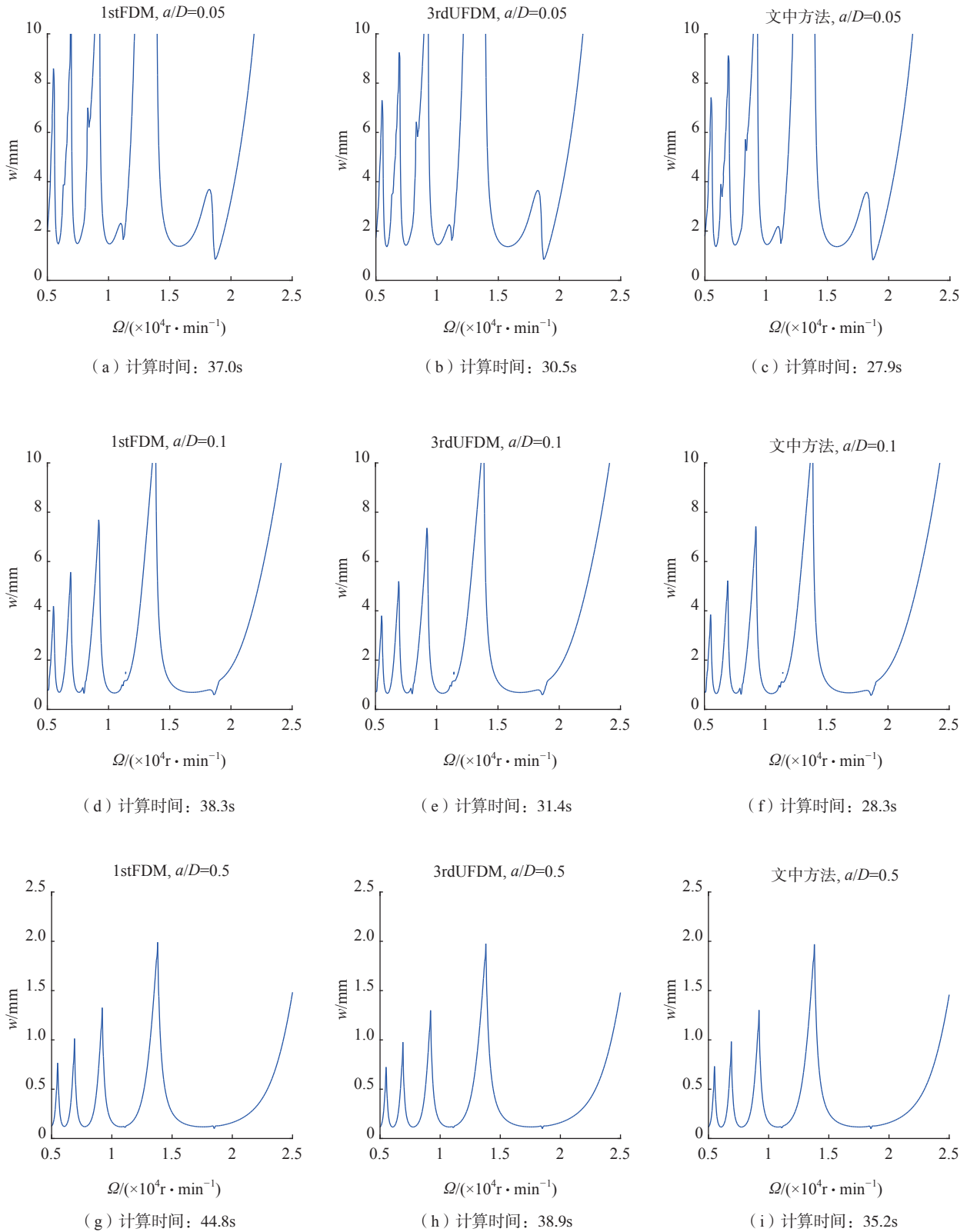


图4 1stFDM、3rdUFDM和文中方法对于双自由度模型的稳定性叶瓣图

Fig.4 Stability lobes of 1stFDM, 3rdUFDM and proposed method in this paper for two-degree-of-freedom model

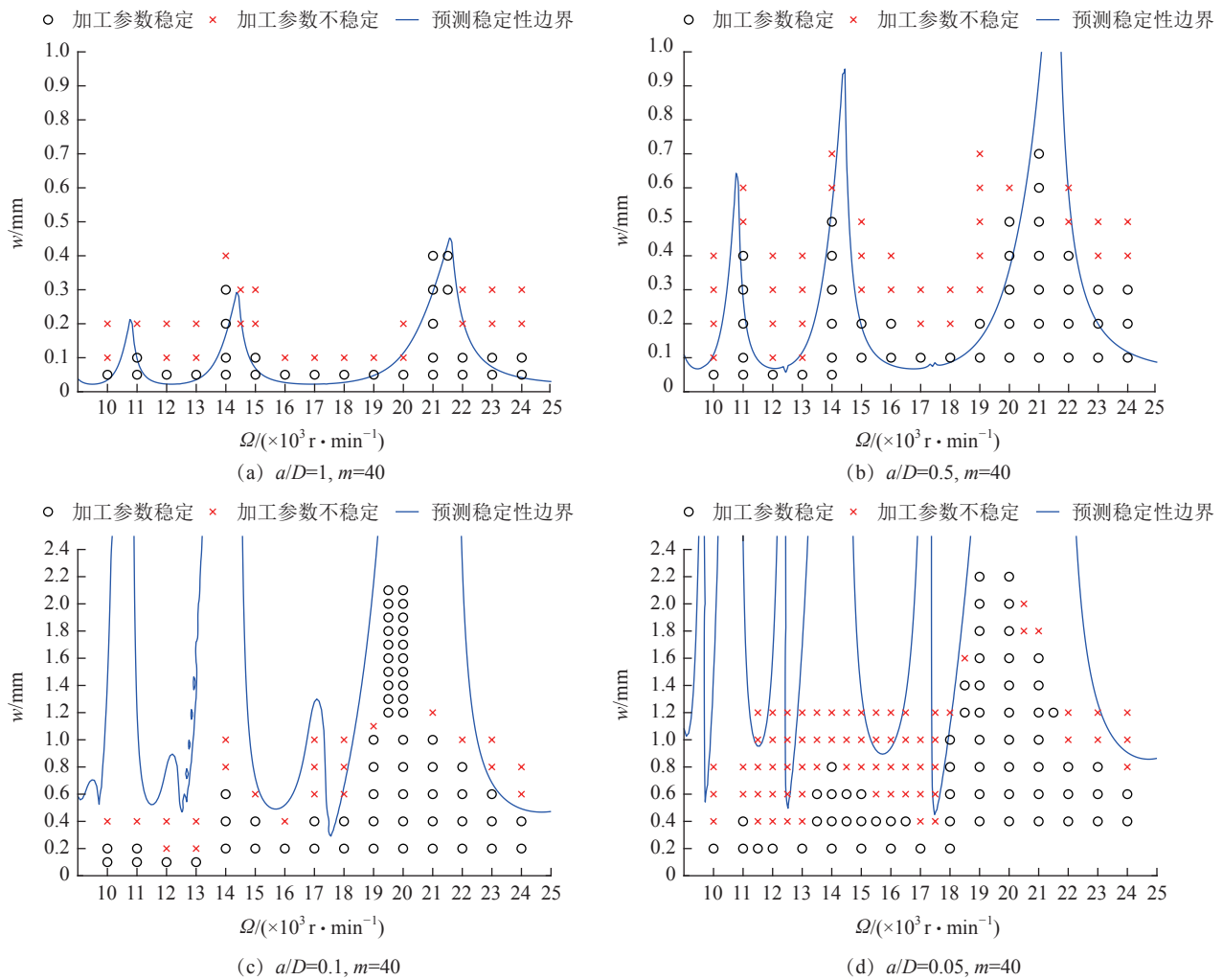


图5 文中方法的稳定性预测结果和试验验证结果

Fig.5 Predicted stability boundaries and stability obtained from experiment

(1)通过对局部离散误差的分析可知,文中方法的计算精度比 1stFDM 和 3rdUFDM 的计算精度分别提高约 93% 和 79%。随着轴向切削深度增加,文中方法在较少的离散数时能达到 1stFDM 和 3rdUFDM 较多离散数时的局部离散误差。

(2)在单自由度铣削模型中,随着离散数的增加,以上 3 种方法的计算精度都逐渐提高。当离散数相同时,文中方法的计算精度高于 1stFDM 和 3rdUFDM,并且计算效率也是最高的。在双自由度铣削模型中,当离散数相同时,3 种方法的计算精度相当,但文中方法的计算效率比 1stFDM 提高约 21%,比 3rdUFDM 提高约 9%。

(3)试验表明,文中方法可以高效准确地预测铣削稳定性。

### 参考文献

[1] 杨昀, 张卫红, 党建卫, 等. 航空薄壁件铣削加工动力学仿

真技术[J]. 航空制造技术, 2018, 61(7): 42-47, 69.

YANG Yun, ZHANG Weihong, DANG Jianwei, et al. Dynamic modelling technology on milling process of aerospace thin-walled workpiece[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2018, 61(7): 42-47, 69.

[2] 李忠群, 石晓芳, 党剑涛, 等. 铣削加工过程动力学建模、仿真研究现状与展望[J]. 航空制造技术, 2018, 61(16): 16-22.

LI Zhongqun, SHI Xiaofang, DANG Jiantao, et al. Review and prospect on dynamic modeling and simulation for milling process[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2018, 61(16): 16-22.

[3] 吴雅, 师汉民, 梅志坚, 等. 金属切削机床颤振理论与控制的新进展[J]. 中国科学基金, 1993, 7(2): 24-30.

WU Ya, SHI Hanmin, MEI Zhijian, et al. New developments of theory and control for machine tool chatter[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 1993, 7(2): 24-30.

[4] 李忠群, 彭岳荣, 夏磊, 等. 基于三阶龙格库塔法的铣削稳定性半解析法预测[J]. 航空制造技术, 2016, 59(23/24): 30-33.

LI Zhongqun, PENG Yuerong, XIA Lei, et al. Prediction of chatter stability for milling process using semi-analytical approach based on three-order Runge-Kutta method[J]. Aeronautical Manufacturing

Technology, 2016, 59(23/24): 30–33.

[5] DAVIES M A, PRATT J R, DUTTERER B S, et al. Stability prediction for low radial immersion milling[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2002, 124(2): 217–225.

[6] LI Z Q, LIU Q. Solution and analysis of chatter stability for end milling in the time-domain[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(2): 169–178.

[7] ALTINTAS Y, BUDAK E. Analytical prediction of stability lobes in milling[J]. CIRP Annals Manufacturing Technology, 1995, 44(1): 357–362.

[8] MERDOL S D, ALTINTAS Y. Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2004, 126(3): 459–466.

[9] INSPERGER T, STEPAN G. Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(1): 117–141.

[10] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. A full-discretization method for prediction of milling stability[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010, 50(5): 502–509.

[11] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. Second-order full-discretization method for milling stability prediction[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010, 50(10): 926–932.

[12] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. Numerical integration method for prediction of milling stability[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2011, 133(3): 031005–031009.

[13] ZHANG Z, LI H G, MENG G, et al. A novel approach for the prediction of the milling stability based on the Simpson method[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2015, 99: 43–47.

[14] YAN Z H, WANG X B, LIU Z B, et al. Third-order updated full-discretization method for milling stability prediction[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 92(5–8): 2299–2309.

[15] DAI Y B, LI H K, XING X Y et al. Prediction of chatter stability for milling process using precise integration method[J]. Precision Engineering, 2017, 52: 152–157.

[16] LI H K, DAI Y B, FAN Z F. Improved precise integration method for chatter stability prediction of two-DOF milling system[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 101(5–8): 1235–1246.

[17] 高强, 谭述君, 钟万龢. 精细积分方法研究综述 [J]. 中国科学: 技术科学, 2016, 46(12): 1207–1218.

GAO Qiang, TAN Shujun, ZHONG Wanxie. A survey of the precise integration method[J]. Scientia Sinica Technologica, 2016, 46(12): 1207–1218.

[18] GRADISEK J, KALVERAM M, INSPERGER T, et al. On stability prediction for milling[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2005, 45(7): 769–781.

通讯作者: 杨文安, 副教授、博士, 主要研究方向为数字化制造与智能制造, E-mail: dreamflow@nuaa.edu.cn.

(责编 一元)

(上接第 71 页)

## 参考文献

[1] 王昊琪, 李浩, 文笑雨, 等. 基于数字孪生的产品设计过程和工作量预测方法 [J/OL]. 计算机集成制造系统: 1–15[2021-04-26]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5946.TP.20200506.1719.008.html>.

WANG Haoqi, LI Hao, WEN Xiaoyu, et al. Product design process and workload prediction method based on digital twin[J/OL]. Computer Integrated Manufacturing System: 1–15[2021-04-26]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5946.TP.20200506.1719.008.html>.

[2] 《智慧工厂》编辑部. 数字孪生——工业 4.0 时代智能制造的未来趋势 [J]. 智慧工厂, 2020(3): 19.

Smart Factory Editorial Department (Trans). Digital twin: The future trend of intelligent manufacturing in the industry 4.0 era[J]. Smart Factory, 2020(3): 19.

[3] 董雷霆, 周轩, 赵福斌, 等. 飞机结构数字孪生关键建模仿真技术 [J]. 航空学报, 2021, 42(03): 113–141.

DONG Leiting, ZHOU Xuan, ZHAO Fubin, et al. Key technologies for modeling and simulation of the airframe digital twin [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(03): 113–141.

[4] 刘勇, 赖啸, 沈涛, 等. 逆向技术在模具零件修复设计中的应用 [J]. 机械工程与自动化, 2019(6): 204–205.

LIU Yong, LAI Xiao, SHEN Tao, et al. Application of reverse technology in repair design of Die parts[J]. Mechanical Engineering & Automation, 2019(6): 204–205.

[5] HENRY C. 数字孪生技术的关键在于数据 [J]. 李韵, 译. 航空维修与工程, 2019(10): 15–16.

HENRY C. What's so new about digital twinning[J]. LI Yun, trans. Aviation Maintenance & Engineering, 2019(10): 15–16.

[6] 吴易洲, 苗瑞, 朱健华, 等. 基于三维激光扫描的窄搭接焊特征提取与缺陷识别 [J]. 应用激光, 2018, 38(5): 817–822.

WU Yizhou, MIAO Rui, ZHU Jianhua, et al. Feature extraction and defect identification of narrow lap welding based on 3D laser scanning[J]. Applied Laser, 2018, 38(5): 817–822.

[7] 王巍, 王诚鑫, 门宇, 等. 基于曲面重建的航空发动机叶片测量方法研究 [J]. 应用激光, 2020, 40(2): 323–326.

WANG Wei, WANG Chengxin, MEN Yu, et al. Research on aerospace engine blade measurement method based on surface reconstruction[J]. Applied Laser, 2020, 40(2): 323–326.

[8] 黄加福. 基于点云数据的不同曲面特征逆向建模方法研究 [J]. 华北科技学院学报, 2020, 17(2): 92–97.

HUANG Jiafu. Research on reverse modeling method of different surface features based on point cloud data[J]. Journal of North China Institute of Science and Technology, 2020, 17(2): 92–97.

[9] 公丕平, 刘武强, 周付明. 工程装备逆向建模中的点云配准技术研究 [J]. 机械管理开发, 2019, 34(6): 239–242, 280.

GONG Piping, LIU Wuqiang, ZHOU Fuming. Point cloud registration technology in reverse engineering of engineering equipment modeling[J]. Mechanical Management and Development, 2019, 34(6): 239–242, 280.

[10] 阳波, 王奋刚, 赖丽珍, 等. 基于 CATIA 软件的曲面重构技术研究 [J]. 机械设计与制造工程, 2017, 46(2): 51–54.

YANG Bo, WANG Fengang, LAI Lizhen, et al. Research on the surface reconstruction technology in CATIA[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2017, 46(2): 51–54.

通讯作者: 王巍, 教授, 主要研究方向为数字化飞机制造技术和飞机装配工艺的通用性及模块化设计, E-mail: wwsh595@163.com.

(责编 一元)